

Graphentheoretische Analyse des Eingangs-Ausgangs-verhaltens singulärer Deskriptorsysteme

1 Einleitung

Viele technische Prozesse können durch *Deskriptorsysteme* (Systeme von Differentialgleichungen und algebraischen Nebenbedingungen) beschrieben werden. Gerade bei der Simulation elektrischer Netzwerke treten lineare Deskriptorsysteme der Form

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

mit den quadratischen $n \times n$ -Matrizen $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und den Matrizen $B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{h \times n}$ auf. Für *reguläre Matrizenscharen* $(sE - A)$, d. h. die Determinante $\det(sE - A)$ verschwindet nicht identisch, ist das System (1) eindeutig lösbar. Durch die Art der Modellierung kann die Regularität von $(sE - A)$ i. allg. nicht garantiert werden. Die sog. *singulären Matrizenscharen* (d. h. $\det(sE - A) \equiv 0$) sind Gegenstand aktueller Forschung. Sie treten u. a. bei elektrischen Netzwerken [1, 2], Aufgaben der Optimalsteuerung [3], ökonomischen Problemen [4] und Identifikationsaufgaben [5] auf.

Zur Untersuchung regulärer Deskriptorsysteme wurden bereits zahlreiche Methoden entwickelt, u. a. auch zur symbolischen Analyse, wobei der Matrizenschar $(sE - A)$ ein gerichteter Graph \mathcal{G} (directed graph, kurz *Digraph*) zugeordnet wird. Das Eingangs-Ausgangsverhalten von (1) wird bei regulären Scharen durch die Übertragungsfunktionsmatrix $T_{reg}(s) := C(sE - A)^{-1}B$ beschrieben. Diese kann aus dem Digraphen \mathcal{G} unter Nutzung graphentheoretischer Regeln abgelesen werden [6, 7]. Für singuläre Deskriptorsysteme ist dieser Zugang nicht direkt nutzbar. Mittels *verallgemeinerter Inverser* $(sE - A)^-$ [8] kann eine (verallgemeinerte) Übertragungsfunktionsmatrix $T(s) := C(sE - A)^- B$ definiert werden [9, S. 31-34].

In diesem Beitrag soll das Eingangs-Ausgangsverhalten von singulären Deskriptorsystemen mittels Digraphen untersucht werden. Dazu werden in Abschnitt 2 die matrizentheoretischen Grundlagen erläutert. Die Definition der benötigten graphentheoretischen Begriffe erfolgt in Abschnitt 3. Im Abschnitt 4 wird eine Methode zur symbolischen Bestimmung der Übertragungsfunktionsmatrix vorgestellt und an einem Beispiel illustriert.

2 Matrizentheoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt wird eine verallgemeinerte Inverse M^- für singuläre quadratische Matrizen M definiert. Sei \mathbb{K} ein beliebiger Zahlenkörper, $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine $n \times n$ -Matrix über \mathbb{K} und $r := \text{rank } M$ der Rang von M . Der *Index* der Matrix M ist definiert durch

$$\text{ind } M := \min\{k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} : \text{rank}(A^k) = \text{rank}(A^{k+1})\}. \quad (2)$$

Im folgenden wird $\text{ind } M \in \{0, 1\}$ angenommen. Das ist offenbar genau dann der Fall, wenn $\text{rank } M = \text{rank}(M^2)$ gilt. Dann existiert eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit

$$M = T^{-1} \begin{pmatrix} W & 0_{r \times n-r} \\ 0_{n-r \times r} & 0_{n-r \times n-r} \end{pmatrix} T,$$

wobei die Matrix $W \in \mathbb{K}^{r \times r}$ regulär ist. Durch die Gleichung

$$\det(I_n - \mu M) = 1 + p_1\mu + p_2\mu^2 + \cdots + p_{r-1}\mu^{r-1} + p_r\mu^r, \quad p_r \neq 0, \quad (3)$$

wobei I_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix ist, werden die Koeffizienten p_i für $1 \leq i \leq r$ definiert. Wegen $\det(I_n - \mu M) = \det(I_r - \mu W)$ gilt für die Matrix $\text{adj}(I_n - \mu M)$ der Adjunkten von $(I_n - \mu M)$:

$$\begin{aligned} \text{adj}(I_n - \mu M) &= \det(I_n - \mu M) \cdot (I_n - \mu M)^{-1} \\ &= \det(I_r - \mu W) \cdot T^{-1} \begin{pmatrix} (I_r - \mu W)^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} T \\ &= T^{-1} \begin{pmatrix} \text{adj}(I_r - \mu W)^{-1} & 0 \\ 0 & \det(I_r - \mu W) \cdot I_{n-r} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine Polynommatrix in μ vom Grade $r - 1$. Der Koeffizient zur Potenz μ^{r-1} ergibt sich zu

$$T^{-1} \begin{pmatrix} \text{adj}(-W)^{-1} & 0 \\ 0 & p_{r-1} I_{n-r} \end{pmatrix} T.$$

Die Matrix M^- wird nun folgendermaßen definiert:

$$M^- = -\frac{1}{p_r} \cdot T^{-1} \begin{pmatrix} \text{adj}(-W)^{-1} & 0 \\ 0 & p_{r-1} I_{n-r} \end{pmatrix} T = T^{-1} \begin{pmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & -\frac{p_{r-1}}{p_r} I_{n-r} \end{pmatrix} T \quad (4)$$

Eine Matrix $G \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt *verallgemeinerte Inverse* von M , wenn gilt $M = M \cdot G \cdot M$, vergl. [8, 10]. Die in Gl. (4) definierte Matrix M^- ist in diesem Sinne eine verallgemeinerte Inverse von M , denn es gilt:

$$\begin{aligned} M \cdot M^- \cdot M &= T^{-1} \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T \cdot T^{-1} \begin{pmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & -\frac{p_{r-1}}{p_r} I_{n-r} \end{pmatrix} T \cdot T^{-1} \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T \\ &= T^{-1} \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T = M. \end{aligned}$$

3 Graphentheoretische Begriffe

Dem Gls. (1) läßt sich ein Digraph \mathcal{G} mit n Deskriptorknoten, m Eingangsknoten und h Ausgangsknoten zuordnen. Ein Element $e_{ij} \neq 0$ bzw. $a_{ij} \neq 0$ wird einer starken bzw. schwachen Kante vom Deskriptorknoten j zum Deskriptorknoten i zugeordnet. Die Nullelemente der Matrizen E , A erscheinen im Digraphen nicht. Ein Element b_{ij} bzw. c_{ij} wird einer schwachen Kante vom Eingangsknoten I_j zum Deskriptorknoten i bzw. vom Deskriptorknoten j zum Ausgangsknoten O_i zugeordnet. Die Elementwerte werden zu Kantengewichten.

Beispiel 1 Dem Deskriptorsystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{53} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:E} \dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:B} u \quad (5)$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:C} x$$

läßt sich der in Abb. 1.a gezeigte Digraph \mathcal{G} zuordnen.

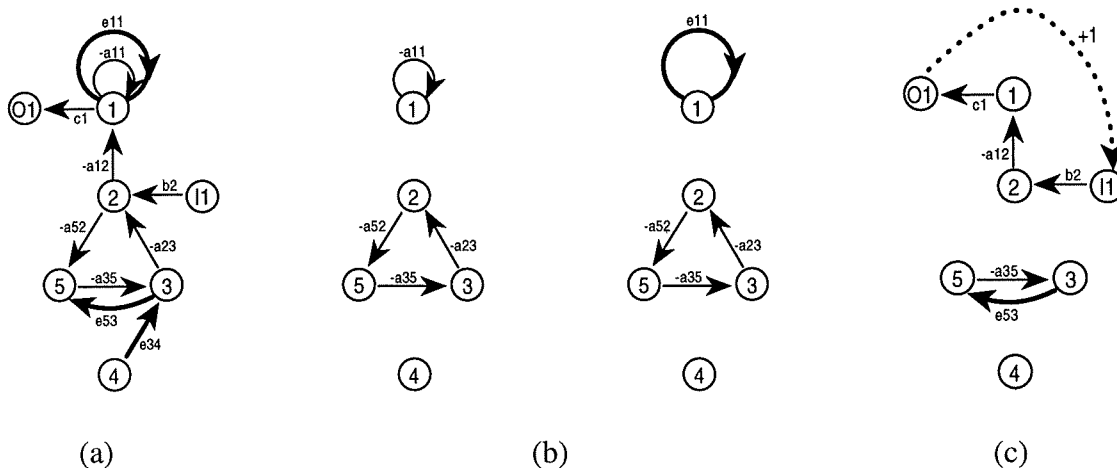


Abbildung 1: (a) Digraph \mathcal{G} (b) Zyklenfamilien der Länge 4 (c) Zyklenfamilie der Weite 4

Ein *Zyklus* ist ein zusammenhängender Teilgraph, bei dem in jedem Knoten genau eine Kante mündet und bei dem von jedem Knoten jeweils genau eine Kante fortführt. Eine Menge knotendisjunkter Zyklen heißt *Zyklenfamilie*, die Anzahl der in der Zyklenfamilie enthaltenen Kanten heißt *Länge* der Zyklenfamilie.

Beispiel 2 Der Digraph \mathcal{G} aus Bsp. 1 enthält genau zwei Zyklenfamilien der Länge 4 (Abb. 1.b), aber keine Zyklenfamilie der Länge 5.

Erweitert man den Digraphen \mathcal{G} durch eine *Rückführkante* vom Ausgangsknoten O_i zum Eingangsknoten I_j , so können Zyklenfamilien entstehen, die im ursprünglichen Digraphen \mathcal{G} nicht vorhanden waren. Zyklenfamilien der *Weite* d sind jene Zyklenfamilien, die die Rückführkante und genau d Deskriptorknoten enthalten.

Beispiel 3 Ergänzt man den Digraphen \mathcal{G} aus Bsp. 1 um eine Rückführkante von O_1 nach I_1 , so gibt es genau eine Zyklenfamilie der Weite 4 (Abb. 1.c).

Um festzustellen, ob $\text{ind}(sE - A) \leq 1$ ist (als Matrix entspr. Gl. (2)), hat man zu prüfen, ob sich die maximale Länge der numerisch sich nicht auslöschenden Zyklenfamilien in \mathcal{G} und in einem modifizierten Graphen, der aus \mathcal{G} durch Hinzufügen einer zusätzlichen Kante zwischen zwei Deskriptorknoten entsteht, höchstens um 1 vergrößern läßt [11], [12, Cor. 5.1]. Unter der Voraussetzung $\text{ind}(sE - A) \leq 1$ ergibt sich der Rang r von $sE - A$ aus der maximalen Länge der numerisch sich nicht auslöschenden Zyklenfamilien in \mathcal{G} . Ist $r < n$, so ist das Deskriptorsystem singulär.

Beispiel 4 Die maximale Länge von Zyklenfamilien im Digraphen \mathcal{G} aus Bsp. 1 ist 4 (Bsp. 2). Da der Digraph \mathcal{G} genau 5 Deskriptorknoten hat, kann die Länge möglicher Zyklenfamilien höchstens 5 sein, egal zwischen welchen zwei Deskriptorknoten man die Zusatzkante einfügt. Folglich gilt $\text{ind}(sE - A) \leq 1$ und $r = \text{rank}(sE - A) = 4$. Das Deskriptorsystem (5) ist daher singulär.

4 Eingangs-Ausgangsverhalten singulärer Deskriptorsysteme

Zur Untersuchung des Eingangs-Ausgangsverhaltens des Deskriptorsystemes (1) wird das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (sE - A) \cdot X &= B \cdot U \\ Y &= C \cdot X \end{aligned}$$

mit einem m -dimensionalen Eingangsvektor U betrachtet. Im folgenden ist $(sE - A)$ nicht als Matrizenschar über \mathbb{R} , sondern als eine Matrix über dem Körper $\mathbb{R}(s)$ der rationalen Funktionen mit reellen Koeffizienten aufzufassen. Die Matrizenschar $(sE - A)$ ist genau dann regulär, wenn die Matrix $(sE - A)$ in $\mathbb{R}(s)$ regulär ist, d. h. wenn $\det(sE - A) \neq 0 \in \mathbb{R}(s)$ gilt. Zur Beschreibung des Eingangs-Ausgangsverhaltens regulärer Matrizen $(sE - A)$ wird die Übertragungsfunktionsmatrix $T_{reg}(s) := C(sE - A)^{-1}B$ genutzt. Bei singulären Matrizen $(sE - A)$ existiert die Inverse $(sE - A)^{-1}$ nicht.

Definition 1 ([9, S. 31-34]) *Eine Abbildung $T(s) := C \cdot G(s) \cdot B$ heißt (verallgemeinerte) Übertragungsfunktionsmatrix, wenn $G(s)$ eine verallgemeinerte Inverse von $(sE - A)$ ist.*

Diese Definition legt die verallgemeinerte Übertragungsfunktionsmatrix nicht eindeutig fest. In dieser Arbeit soll die in Gl. (4) definierte verallg. Inverse $(sE - A)^-$ verwendet werden, d. h. man setzt $T(s) := C(sE - A)^- B$.

Beispiel 5 *Die symbolische Berechnung (z. B. mit MATHEMATICA) von $T(s) := C(sE - A)^- B$ für das Deskriptorsystem (5) aus Beispiel 1 liefert*

$$T(s) = t_{11}(s) = \frac{c_1 \cdot b_2 \cdot a_{12} \cdot e_{53} \cdot s}{(a_{11} - s \cdot e_{11}) \cdot a_{23} \cdot a_{52}}.$$

Die entspr. Gl. (4) definierte verallgemeinerte Inverse $(sE - A)^-$ ist eine rationale Matrix in s . Der Nenner der Übertragungsfunktionsmatrix $C(sE - A)^- B$ kann vom Digraphen \mathcal{G} folgenmaßen abgelesen werden:

Satz 1 *Es sei $\text{ind}(sE - A) \leq 1$ und r die max. Länge numerisch sich nicht auslöschender Zyklenfamilien im Digraphen \mathcal{G} . Jede Zyklenfamilie der Länge r entspricht einem Summanden des Nenners der Übertragungsfunktionsmatrix. Der Wert jedes Summanden ergibt sich aus dem Produkt der Gewichte der in der Zyklenfamilie enthaltenen Kanten multipliziert mit $s^r \cdot (-1)^\nu$, falls die betrachtete Zyklenfamilie aus τ starken Kanten und ν einzelnen Zyklen besteht.*

Beweis. Sei M zunächst eine bel. $n \times n$ -Matrix. Die Koeffizienten p_i , $1 \leq i \leq n$, von $\det(I - \mu M)$ entspr. Gl. (3) lassen sich aus dem Digraphen $\mathcal{G}(M)$ ablesen, vergl. [13] und [6, Th. A.2.5]: Jede Zyklenfamilie der Länge i entspricht dann einem Summanden von p_i . Der Wert jedes Summanden ergibt sich aus dem Produkt der Gewichte der in der Zyklenfamilie enthaltenen Kanten. Jeder Summand ist mit dem Vorzeichenfaktor $(-1)^\nu$ zu multiplizieren, wenn die Zyklenfamilie aus ν disjunkten Zyklen besteht. Sei nun $M := sE - A$ und $\mathcal{G} := \mathcal{G}(sE - A)$. Unter der Voraussetzung $\text{ind}(sE - A) \leq 1$ ist die in Gl. (4) definierte Matrix M^- eine verallgemeinerte Inverse von M . Der Koeffizient $p_r = p_r(s)$ ist dann der Nenner der Übertragungsfunktionsmatrix $T(s) := C(sE - A)^- B$, wobei r die maximale Länge numerisch sich nicht auslöschender Zyklenfamilien im Digraphen \mathcal{G} ist (vergl. Abschnitt 3). Enthält eine solche Zyklenfamilie τ starke Kanten, so entspricht dies τ Einträgen der Matrix E , und der zugehörige Summand ist daher zusätzlich mit dem Faktor s^τ zu multiplizieren. ■

Beispiel 6 *Betrachtet seien die zwei Zyklenfamilien der Länge 4 des Digraphen \mathcal{G} aus Bsp. 1. Die eine Zyklenfamilie besteht aus vier schwachen Kanten mit den Gewichten $-a_{11}$, $-a_{23}$, $-a_{35}$, $-a_{52}$, keiner starken Kante und setzt sich aus zwei Zyklen zusammen. Der entsprechende Summand lautet daher $a_{11}a_{23}a_{35}a_{52}$. Die andere Zyklenfamilie enthält drei schwache Kanten mit den Gewichten $-a_{23}$, $-a_{35}$, $-a_{52}$, eine starke Kante mit dem Gewicht e_{11} , und zerfällt in zwei Zyklen. Diese Zyklenfamilie kann daher dem Summanden $-se_{11}a_{23}a_{35}a_{52}$ zugeordnet werden. Insgesamt hat die Übertragungsfunktion somit den Nenner $(a_{11} - se_{11}) \cdot a_{23} \cdot a_{35} \cdot a_{52}$.*

Die Elemente $t_{ij}(s)$ der Übertragungsfunktionsmatrix $T(s) := (t_{ij}(s))$ können aus dem Digraphen \mathcal{G} abgelesen werden:

Satz 2 *Es sei $\text{ind}(sE - A) \leq 1$ und r die max. Länge numerisch sich nicht auslöschender Zyklenfamilien im Digraphen \mathcal{G} . Zur Bestimmung des Zählers der Übertragungsfunktion $t_{ij}(s)$ vom Eingang j zum Ausgang i ist der Digraph \mathcal{G} um eine Rückführkante vom Ausgangsknoten O_i zum Eingangsknoten I_j mit dem Kantengewicht "+1" zu erweitern. Jede Zyklenfamilie der Weite r entspricht einem Summanden des Zählers der Übertragungsfunktions $t_{ij}(s)$. Der Wert jedes Summanden ergibt sich aus dem Produkt der Gewichte der in der Zyklenfamilie enthaltenen Kanten multipliziert mit $s^r \cdot (-1)^\nu$, falls die betrachtete Zyklenfamilie aus τ starken Kanten und ν einzelnen Zyklen besteht.*

Beweis. Sei $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zur Bestimmung des (i, j) -ten Elementes des Zählers von $T(s)$ betrachtet man zunächst die zur Potenz μ^{l-1} gehörenden Koeffizienten p_l^{ij} :

$$\begin{aligned} (C(I_n - \mu M)^{-1}B)_{ij} &= \frac{1}{\det(I_n - \mu M)} \cdot c_i^\top \cdot \text{adj}(I_n - \mu M) \cdot b_j \\ &= \frac{1}{\det(I_n - \mu M)} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & I_n - \mu M & b_j \\ 0 & c_i^\top & 0 \end{pmatrix} \\ &=: \frac{1}{\det(I_n - \mu M)} \cdot \sum_{l=1}^n p_l^{ij} \mu^{l-1} \end{aligned} \quad (6)$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & I_n - \mu M & b_j \\ 0 & c_i^\top & 0 \end{pmatrix}$$

kann einem Digraphen \mathcal{G} zugeordnet werden. Die Einträge b_j und c_i^\top sind dann als Eingangs- bzw. Ausgangskanten zu interpretieren, und der Eintrag "-1" kann als Rückführkante vom Ausgang O_i zum Eingang I_j aufgefaßt werden, vergl. [14, 6]. Jede Zyklenfamilie der Weite l entspricht dann einem Summanden des Koeffizienten p_l^{ij} aus Gl. (6). Der Wert jedes Summanden ergibt sich aus dem Produkt der Gewichte der in der Zyklenfamilie enthaltenen Kanten multipliziert mit $(-1)^\nu$, falls die betrachtete Zyklenfamilie aus ν einzelnen Zyklen besteht. Setzt man $M := sE - A$, so ist $T(s) := C(sE - A)^{-1}B$ eine (verallg.) Übertragungsfunktionsmatrix (wegen der Voraussetzung $\text{ind}(sE - A) \leq 1$). Zum Ablesen des Koeffizienten $p_r^{ij} = p_r^{ij}(s)$ zur Potenz μ^{r-1} des (i, j) -ten Elementes der Polynommatrix

$$-\text{adj}(I_n - \mu M) = -\text{adj}(I_n - \mu(sE - A))$$

ist der Digraph \mathcal{G} nun um eine Rückführkante mit dem Gewicht "+1" vom Ausgangsknoten O_i zum Eingangsknoten I_j zu erweitern. Jeder Summand des Zählers von $t_{ij}(s)$ ergibt sich dann wie oben angegeben aus den Zyklenfamilien der Weite r . Enthält eine solche Zyklenfamilie τ starke Kanten, so entspricht dies τ Elementen der Matrix E , und der zugehörige Summand ist daher außerdem mit dem Faktor s^τ zu multiplizieren. ■

Beispiel 7 *Um den Zähler der Übertragungsfunktion $T(s) = t_{11}(s)$ des Deskriptorsystems (5) ablesen zu können, ist der Digraph \mathcal{G} um eine Rückführkante von O_1 nach I_1 mit dem Gewicht "+1" zu erweitern. Zu der Zyklenfamilie der Weite $r = 4$ im modifizierten Digraphen (Abb. 1.c) gehören die Kantengewichte $+1, b_2, -a_{12}, c_1, e_{53}, -a_{35}$. Der Zähler der Übertragungsfunktion lautet somit $c_1 b_2 a_{12} a_{35} e_{53} s$. Als Übertragungsfunktion erhält man in Übereinstimmung mit Beispiel 5:*

$$T(s) = t_{11}(s) = \frac{c_1 \cdot b_2 \cdot a_{12} \cdot a_{35} \cdot e_{53} \cdot s}{(a_{11} - s \cdot e_{11}) \cdot a_{23} \cdot a_{35} \cdot a_{52}} = \frac{c_1 \cdot b_2 \cdot a_{12} \cdot e_{53} \cdot s}{(a_{11} - s \cdot e_{11}) \cdot a_{23} \cdot a_{52}}$$

Literatur

- [1] B. Dziurla und R. Newcomb. Input-output pairing in LTV semistate systems. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, CAS-36(1):139–141, 1989.
- [2] M. Fosséprez. *Non-linear Circuits - Qualitative Analysis of Non-linear, Non-reciprocal Circuits*. Wiley, 1992.
- [3] P. Kunkel und V. Mehrmann. Numerical solution of differential algebraic riccati equations. *Linear Algebra and its Applications*, 137/138:39–66, 1990.
- [4] F. L. Lewis. Geometric design techniques for observers in singular systems. *Automatica*, 26:411–415, 1990.
- [5] R. Nikoukhah, A. S. Willsky, und B. C. Levy. Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-37(9):1325–1342, 1992.
- [6] K. J. Reinschke. *Multivariable Control - A Graph-theoretic Approach*, Band 108 of *Lecture Notes in Control and Information Science*. Springer-Verlag, 1988.
- [7] K. J. Reinschke. Graph-theoretic approach to symbolic analysis of linear descriptor systems. *Linear Algebra and its Applications*, 197,198:217–244, 1994.
- [8] A. Ben-Israel und T. N. E. Greville. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. Wiley-Interscience, 1974.
- [9] M. Hou. *Descriptor Systems: Observers and Fault Diagnosis*, volume 482 of *Reihe 8: Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1995.
- [10] C. R. Rao und S. K. Mitra. *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*. John Wiley & Sons, 1971.
- [11] D. Hershkowitz. The relation between the Jordan structure of a matrix and its graph. *Linear Algebra and its Applications*, 184:55–69, 1993.
- [12] K. Röbenack und K. J. Reinschke. Graph-theoretically determined Jordan block size structure of regular matrix pencils, 1997. *Linear Algebra Appl.*, Im Druck.
- [13] M. M. Milič. Flow-graph evaluation of the characteristic polynomial of a matrix. *IEEE Trans. on Circuit Theory*, CT-11:423–424, 1964.
- [14] C. A. Desoer. The optimum formula for the gain of a flow graph or a simple derivation of coates' formula. *Proc. IRE*, 48:883–889, 1960.

Autorenangaben:

Prof. Dr. Reinschke, K. J.

Dipl.-Ing. Röbenack, K.

Technische Universität Dresden, Mommsenstr. 13

01062 Dresden

Tel.: +49 351 3940

Fax.: +49 351 7281, E-mail: reinschk@eatfs1.et.tu-dresden.de, roebenak@erss11.et.tu-dresden.de